ЛА Касперка 10.12.12

ядро и образ на линейно изображение. Обратими линейни оператори

Деф

Ако $f: U \to V$ е линейно изображение то множеството $\operatorname{Ker} f = \{u \in U \mid f(u) = \vec{0}_V\}$ се нарича ядро на f, а множеството $\operatorname{Im} f = \{f(u) \mid u \in U\}$ се нарича образ на f

Лема

Ако $f: U \to V$ е линейно изображение то $\operatorname{Ker} f$ е подпространство на U. Образът на f ($\operatorname{Im} f$) е подпространство на V

Док

Ако $u_1, u_2 \in \operatorname{Ker} f$ и $\lambda \in F$, то $f(u_1+u_2) = f(u_1) + f(u_2) = \vec{0}_V + \vec{0}_V = \vec{0}_V$ и $f(\lambda u_1) = \lambda f(u_1) = \lambda \vec{0}_V = \vec{0}_V$. Следователно u_1+u_2 и λu_1 са в ядрото на f и $\operatorname{Ker} f$ е подпространство на U

Ако $f(u_1), f(u_2) \in \operatorname{Im} f$, $u_1, u_2 \in U$, $\lambda \in F$, то $f(u_1) + f(u_2) = f(u_1+u_2) \in \operatorname{Im} f$ и $\lambda f(u_1) = f(\lambda u_1) \in \operatorname{Im} f$

Следователно $\operatorname{Im} f$ е подпространство на V

Деф

Нека $f: U \to V$ е линейно изображение. Ако $\operatorname{Ker} f$ е крайномерно подпространство на U то $d(f) = \dim \operatorname{Ker} f$ се нарича дефект на f

Ако $\operatorname{Im} f$ е крайномерно подпространство на V то $r(f) = \dim \operatorname{Im} f$ се нарича ранг на f

За $u \in U$, множеството $f^{-1}(f(u)) = \{u+w \mid w \in \operatorname{Ker} f\}$

ако $w \in \operatorname{Ker} f$ то $f(u+w) = f(u) + f(w) = f(u) + \vec{0}_V \Rightarrow u+w \in f^{-1}(f(u))$

Ако $u_1 \in f^{-1}(f(u))$ то $f(u_1) = f(u) \Rightarrow f(u_1-u) = \vec{0}_V \Rightarrow$

$u_1 - u = w \in \operatorname{Ker} f$, $u_1 = u + w$ т.е.

$f^{-1}(f(u)) \subseteq \{u+w \mid w \in \operatorname{Ker} f\}$ и $f^{-1}(f(u)) = \{u+w \mid w \in \operatorname{Ker} f\}$

Прообразите на $f(u)$ под действие на f образуват подмножество на u, изоморфно на ядрото на f, колкото е по-голям дефектът или размерността на ядрото на f, толкова по-малко вектори на u са биле отъждествени при действието на f

Th за ранга и дефекта на линейно изображение

Ако $f: U \to V$ е линейно изображение на n-мерно пространство U в произволно пространство V то

$$r(f) + d(f) = \dim U = n$$

Док-во

Означаваме $k = d(f) = \dim \operatorname{Ker} f$ избираме базис $e_1 - e_k$ на $\operatorname{Ker} f$, допълваме до базис $e_1 - e_k, e_{k+1} - e_n$ на U. Достатъчно е да докажем че образите на $f(e_{k+1}) - f(e_n)$ са базис на $\operatorname{Im} f$ за да получим че $r(f) = \dim \operatorname{Im} f = n - k = n = d(f)$. От $f(e_{k+1}) - f(e_n) \in \operatorname{Im} f$ следва $\mathbf{L}(f(e_{k+1}) - f(e_n)) \subseteq \operatorname{Im} f$, защото $\operatorname{Im} f$ е подпространство на V. Всеки вектор от образа на f е вида $v = f(u)$ за някакво $u \in U$. Тогава $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ т.че $v = f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \in \mathbf{L}(f(e_{k+1}) - f(e_n))$ защото $f(e_1) = \dots = f(e_k) = \vec{0}_V$ от $e_k \in \operatorname{Ker} f$. Следователно

$$\operatorname{Im} f \in \mathbf{L}(f(e_{k+1}) - f(e_n))$$

Ако $\vec{0}_V = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i f(e_i) = f(\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i)$, то $\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i \in \operatorname{Ker} f$

Следователно $\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j$

Съгласно ЛНЗ-т на базис $e_1 - e_n$ на U, откък

следва $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$. Това доказва че $f(e_{k+1}) \dots f(e_n)$ са ЛНЗ-ни, а оттам и базис на образа на $f(\mathrm{Im} f)$

ТВ

Ако $f: U \to V$ е линейно изображение на крайномерни пространства с матрица $A \in M_{m \times n}(F)$ спрямо базис $e_1 \dots e_n$ на U и базис $f_1 \dots f_m$ на V, то $\underline{r(f) = rk(A)}$

Док-во

Ако $e_1 \dots e_n$ е базис на U твърдим че $\mathrm{Im} f = \mathcal{L}(f(e_1) \dots f(e_n))$. По-точно $f(e_1) \dots f(e_n) \in \mathrm{Im} f$ $\Rightarrow \mathcal{L}(f(e_1) \dots f(e_n)) \in \mathrm{Im} f$. Всеки вектор на $\mathrm{Im} f$ е от вида $f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \in \mathcal{L}(f(e_1) \dots f(e_n))$
Следователно образът на f $\mathrm{Im} f \in \mathcal{L}(f(e_1) \dots f(e_n))$ и съвпада с него т.е. $r(f) = \dim \mathrm{Im} f = \dim \mathcal{L}(f(e_1) \dots f(e_n))$ $= rk(f(e_1) \dots f(e_n)) = rk$ (вектор столбовете на A)

$$A = \begin{matrix} f(e_1) \\ \\ f(e_n) \end{matrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ f(e_1) & \dots & f(e_n) \\ | & & | \end{pmatrix} = rk(A)$$

Деф

Взаимно еднозначните линейни оператори $f: U \to U$ се наричат обратими линейни оператори (ОЛО). Обратимите линейни оператори са точно линейните изоморфизми $f: U \to U$ на U със себе си

Св-ва

1) Ако $f: U \to U$ е ЛО то $f^{-1}: U \to U$ е ЛО, а оттам и ОЛО в U
2) Ако $f: U \to U$ е ОЛО и $\lambda \in F^* \subseteq F \setminus \{0\}$ то

$\lambda\varphi : U \to U$ е ОЛО

Док-во

Вече знаем че $\lambda\varphi$ е ЛО. За взаимната еднозначност на $\lambda\varphi : U \to U$ е достатъчно да проверим че $(\lambda^{-1}\varphi^{-1})(\lambda\varphi) = (\lambda\varphi)(\lambda^{-1}\varphi^{-1}) = Id_U$.

Тогава $\lambda\varphi$ е обратим и $(\lambda\varphi)^{-1} = \lambda^{-1}\varphi^{-1}$. За $u \in U$ имаме $(\lambda^{-1}\varphi^{-1})(\lambda\varphi)(u) = (\lambda^{-1}\varphi^{-1})(\lambda\varphi(u)) = \lambda^{-1}\varphi^{-1}(\lambda\varphi(u)) \overset{\varphi \in ЛО}{=}$
$\lambda^{-1}\lambda\varphi^{-1}(\varphi(u)) = 1_F u = u$ и $(\lambda\varphi)(\lambda^{-1}\varphi^{-1})(u) = (\lambda\varphi)(\lambda^{-1}\varphi^{-1}(u)) =$
$\lambda\varphi(\lambda^{-1}\varphi^{-1}(u)) = \lambda\lambda^{-1}\varphi(\varphi^{-1}(u)) = 1_F u = u$

3) Ако $\varphi : U \to U$ и $\psi : U \to U$ са ОЛО то $\psi\varphi : U \to U$ е ОЛО

Док-во

Вече знаем че произведението $\psi\varphi$ на линейни оператори φ и ψ в U е линеен оператор в U. Достатъчно е да проверим че $(\varphi^{-1}\psi^{-1})(\psi\varphi) = (\psi\varphi)(\varphi^{-1}\psi^{-1}) = Id_U$, за да твърдим че операторът $\psi\varphi$ е обратим и неговият обратен е $\varphi^{-1}\psi^{-1}$.

(забележка: при смяна степента на ЛО се смяна и позицията вдясно т.е. ако $\varphi\psi$ то ОЛО е $\psi^{-1}\varphi^{-1}$)

Наистина за $u \in U$ имаме $(\varphi^{-1}\psi^{-1})(\psi\varphi)(u) =$
$= \varphi^{-1}(\psi^{-1}(\psi(\varphi(u)))) = \varphi^{-1}(\psi^{-1}\psi(\varphi(u))) = \varphi^{-1}(\varphi(u)) = u$

(аналогично за $(\psi\varphi)(\psi^{-1}\varphi^{-1})(u)$)

ТВ

Нека $\varphi : U \to U$ е ОЛО, а $B \in Mat_n(F)$ (задължително матрицата да е квадратна) е матрицата на φ^{-1} спрямо базиса $e_1 .. e_n$. За произволен оператор $\alpha : U \to U$ означаваме с N матрицата на α спрямо $e_1 .. e_n$. Тогава $\varphi^{-1}\varphi = \varphi\varphi^{-1} = Id_U$
имаме $E_n = N(Id_U) = N(\varphi\varphi^{-1}) = N(\varphi^{-1})N(\varphi) = BA$
$E_n = N(Id_U) = N(\varphi\varphi^{-1}) = N(\varphi)N(\varphi^{-1}) = AB$

От $BA = AB = E_n \Rightarrow$ че матрицата A е обратима и B е точно обратната на A ($B = A^{-1}$)

Нека $A \in M_{n\times n}(F)$ е обратима матрица а $\varphi: U \to U$ е ЛО с матрица A^{-1} спрямо базиса $e_1 - e_n$. Достатъчно е да проверим че $\psi\varphi = \varphi\psi = \mathrm{Id}_U$ за да получим че ЛО φ е обратим и $\varphi^{-1} = \psi$. Поради взаимната еднозначност на съответствието м/у линейните оператори $\alpha: U \to U$ и техните матрици $N(\alpha) \in M_{n\times n}(F)$ спрямо фиксираният базис съвкупе доказателството на твърдението ни матрица

$$N(\psi\varphi) = N(\varphi\psi) = N(\mathrm{Id}_U) = E_n$$

Но $N(\psi\varphi) = N(\psi)N(\varphi) = A^{-1}A = E_n$

$N(\varphi\psi) = N(\varphi)N(\psi) = AA^{-1} = E_n$

ТСД

Следните условия са еквивалентни за линеен оператор $\varphi: U \to U$ в n-мерно пр-во U

1) φ е обратим линеен оператор
2) $\ker\varphi = \{\vec{0}_U\}$
3) $d(\varphi) = \dim \ker\varphi = 0$
4) $r(\varphi) = \dim \mathrm{Im}\,\varphi = n$
5) $\mathrm{Im}\,\varphi = U$
6) φ трансформира базис $e_1 - e_n$ на U в базис $\varphi(e_1) - \varphi(e_n)$ на U

Доц-во от 1 → 2

Ако $\varphi: U \to U$ е ОЛО то $\ker\varphi$ се изчерпва с $\vec{0}_U$, защото за $\forall u \in U \setminus \{\vec{0}_U\}$ имаме $\varphi(u) \neq \vec{0}_U$ съгласно взаимната еднозначност на φ

от 2 → 3
Ако $\ker f = \{\vec{0}_U\}$ то $d(f) = \dim \ker f = 0$
от 3 ⇒ 4
По теоремата за ранга и дефекта на линейно изображение $d(f) + r(f) = \dim U = n$
Ако $d(f) = 0 \Rightarrow r(f) = n$
от 4 → 5
$\operatorname{Im} f$ е подпространство на U. Ако по условие $r(f) = \operatorname{Im}(f) = \dim U = n$ то подпространството $\operatorname{Im} f$ съвпада с пространството U, $U = \operatorname{Im} f$
от 5 → 6
За произволна база $e_1 - e_n$ на U и произволна ЛО $f: U \to U$ доказахме че $\operatorname{Im} f = \mathcal{L}(f(e_1) - f(e_n))$. Ако $U = \operatorname{Im} f = \mathcal{L}(f(e_1) - f(e_n))$ то $n = \dim U = \dim \mathcal{L}(f(e_1) - f(e_n)) = \operatorname{rk}(f(e_1) - f(e_n))$
Следователно $f(e_1) - f(e_n)$ са ЛНЗ-ни и образуват база на U
от 6 → 1
Нека $e_1 - e_n$ е база на U, която се изобразява в база $f(e_1) - f(e_n)$ на U.
Разглеждаме ЛО $f: U \to U$ с $\psi(f(e_i)) = e_i$ за $\forall\ 1 \le i \le n$
$(\psi f)(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) \overset{\text{е}}{=}_{\text{ЛИН}} \psi(\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)) \overset{\psi\text{е}}{=}_{\text{ЛИН}} \sum_{i=1}^{n} x_i \psi f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ за $\forall$
$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in U$. Откък получаваме че ψf е тъждественият линеен оператор т.е. $\psi f = \operatorname{Id}_U$
Аналогично от $(f\psi)(\sum_{i=1}^{n} y_i f(e_i)) = \sum_{i=1}^{n} y_i f(e_i)$ за $\forall$ $\sum_{i=1}^{n} y_i f(e_i) \in U$. Следователно $f\psi = \operatorname{Id}_U$

Ще обратим и $\varphi^{-1} = \psi$

Характеристични корени и собствени стойности на линейния оператор в крайномерно пространство

Диагонализация на оператори и матрици с прост спектър

Деф
Характеристичният полином на $A \in M_{n\times n}(F)$ е $f_A(x) = \det(A - xE_n)$

$$\det(A - xE_n) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn}-x \end{vmatrix}$$

$$(-1)^n x^n + (-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn})x^{n-1} + \dots \pm \det(A)$$

$t_2(A)$ - следа на матрицата A

Корените на $f_A(x)$ се наричат характеристични корени на A

Лема
Ако матрицата $B = T^{-1}AT$ е подобна на матрицата A, то характеристичните полиноми $f_B(x)$ и $f_A(x)$ на A и B съвпадат, т.е. $f_A(x) = f_B(x)$

Док-во
$f_B(x) = \det(B - xE_n) = \det(T^{-1}AT - T^{-1}(xE_n)T) =$
$\det(T^{-1}(A - xE_n)T) = \det(T^{-1})\det(A - xE_n)\det(T) =$
$\det(T^{-1}T)\det(A - xE_n) = \det(E_n) f_A(x) = 1 \cdot f_A(x) = f_A(x)$

! (от $E_n = T^{-1} E_n T$ и $xE_n = xT^{-1}E_nT = T^{-1}(xE_n)T$)

Деф
Ако $\varphi: U \to U \in LO$ в n-мерно пространство U то характеристичният полином на матрицата на φ в една, а оттам и всеки една базис на U се нарича характеристичен полином на φ и се бележи $f_\varphi(x)$, по-точно ако φ има матрица A спрямо базис $e=(e_1 - e_n)$ на U, то за произволен базис $f = eT$ матрицата на φ спрямо f е $T^{-1}AT$ и $f_A(x) = f_{T^{-1}AT}(x)$. Въвеждаме $f_\varphi(x) \stackrel{def}{=} f_A(x) = f_{T^{-1}AT}(x)$.
Корените на $f_\varphi(x)$ се наричат характеристични корени на φ

Деф
Ненулевият вектор $v \in U$ е собствен вектор на LO $\varphi: U \to U$ ако $\varphi(v) = \lambda v$ за някое $\lambda \in F$. Скаларът λ се нарича собствена стойност на φ, отговаряща на собствения вектор v

Т6 ll
Характеристичните корени на LO $\varphi: U \to U$ които са от основното поле F съвпадат със собствените стойности на φ

Док-во
Ако $M \in M_{n\times n}(F)$ то хомогенната система линейни уравнения $Mx = O_{n\times 1}$ има ненулево решение $\Leftrightarrow rk(M) < n \Leftrightarrow det(M) = 0$
Скаларът $\lambda \in F$ е собствена стойност на $\varphi: U \to U \Leftrightarrow$ съществува ненулев вектор $v \in U \setminus \{\vec{0}_V\}$ с $\varphi(v) = \lambda v$. Избираме базис

$e_1 - e_n$ на U и означаваме с A матрицата на f спрямо тази база. Ако $x \in M_{n\times 1}(F)$ е координатният стълб на v спрямо базиса $e = (e_1 -- e_n)$ и $y = M_{n\times 1}(F)$ е координатният стълб на $f(v)$ относно базиса e то $f(v) = \lambda v \Leftrightarrow y = Ax = \lambda x = \lambda E_n x$. Последното е равносилно на $(A - \lambda E_n)x = 0_{n\times 1}$ за ненулев стълб x ($x \neq 0_{n\times 1}$). Но хомогенната система линейни уравнения $(A = \lambda E_n)x = 0_{n\times 1}$ има ненулево решение $x \neq 0_{n\times 1}$, точно когато $f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n) = 0$. По този начин $\lambda \in F$ е собствена стойност на f $\Leftrightarrow$ λ е характеристичен корен на f принадлежащ на F

ТЕЗА 2

Нека $v_{i1} - v_{ik_i}$ са собствени вектори на ЛО $f: U \to U$, отговарящи на собствена стойност λ_i, Ако $\lambda_1 - \lambda_m$ са различни собствени стойности и за $\forall\, 1 \leq i \leq m$ векторите $v_{i1} - v_i$ са ЛНЗ-ми, то системата на всички $\{v_{ij} \mid 1 \leq j \leq k_i,\ 1 \leq i \leq m\}$ е ЛНЗ-но

Вчастност ако v_i са собствени вектори на $f: U \to U$ отговарящи на собствени стойности λ_i, $\lambda_1 - \lambda_m \in F$ са различни то $v_1 - v_m$ са ЛНЗ-ми защото за $1 \leq i \leq m$ векторът $v_i \neq \vec{0}$ и е ЛНЗ

Док-во

С индукция по броя на различните собствени стойности

За $m = 1$ няма какво да се докаже.

В общия случай нека разгледаме

1) $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i} \mu_{ij} v_{ij} = \vec{0}_u$ с $\mu_{ij} \in F$

Действаме с φ върху 1 и получаваме 2

2) $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i} \mu_{ij} \varphi(v_{ij}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i} \mu_{ij} \lambda_i v_{ij} = \varphi(\vec{0}_u) = \vec{0}_u$

елиминираме $v_{m1} - v_{mk_m}$ като събираме 2 със 1 умножено с $(-\lambda_m)$. Това дава

3) $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i} (\mu_{ij}\lambda_i - \mu_{ij}\lambda_m) v_{ij} = \vec{0}_u$

$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i} (\lambda_i - \lambda_m)\mu_{ij} v_{ij} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{k_i} (\lambda_i - \lambda_m)\mu_{ij} v_{ij} = \vec{0}_u$

По индукционно предположение
$\{v_{ij} \mid 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le k_i\}$ са ЛНЗ-ни така че

$(\lambda_i - \lambda_m)\mu_{ij} = 0$ за $\forall\ 1 \le i \le m-1$, $\forall\ 1 \le j \le k_i$, но $\lambda_i - \lambda_m \neq 0$ за $i < m$ т.е. $\mu_{ij} = 0$ за $\forall\ 1 \le j \le k_i$, $\forall\ 1 \le i \le m-1$. Сега 1 гласи че

$\sum_{j=1}^{k_m} \mu_{mj} v_{mj} = \vec{0}$ и откъдето $\mu_{mj} = 0$ за $\forall$

$1 \le j \le k_m$ и $\{v_{ij} \mid 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le k_m\}$ е

ЛНЗ-на система